DURÉE : 4 heures

(Les questions précédées d'un astérisque sont considérées comme étant plus difficiles)

I. PRÉLIMINAIRES

On considère un groupe commutatif G noté additivement. Une fonction f de G dans C est dite *de type positif* si, quel que soit $n \geq 1$ et quels que soient $a_1, \dots, a_n$ dans C, $x_1, \dots, x_n$ dans G,

(1) $\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} a_p \bar{a}_q f(x_p - x_q)$ est un réel ≥ 0.

1° Soit f une fonction de type positif :

a. Montrer que $f(0)$ est réel ≥ 0.

b. Montrer que $af(x) + \bar{a}f(-x)$ est réel pour tout $a \in C$ et tout $x \in G$. En déduire qu'on a $f(-x) = \overline{f(x)}$ pour tout $x \in G$.

c. En prenant $n = 2$ dans (1), et en choisissant a_1 et a_2 judicieusement, montrer que l'on a $|f(x)| \leq f(0)$ pour tout $x \in G$.

2° On appelle *caractère* de G tout homomorphisme du groupe G dans le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. Une fonction h de G dans C est donc un caractère si on a pour tout $x, y \in G$,

(2) $|h(x)| = 1$ et $h(x + y) = h(x)\,h(y)$.

a. Montrer que tout caractère est une fonction de type positif

[on pourra utiliser l'identité : $\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \alpha_p \beta_q = \left(\sum_{p=1}^{n} \alpha_p\right)\left(\sum_{q=1}^{n} \beta_q\right)$].

**b.* Montrer par récurrence, en utilisant (2), que $n+1$ caractères distincts $h_1, \dots, h_n$ et h sont nécessairement linéairement indépendants sur C.

3° Soient E un ensemble et $f_1, \dots, f_n$ des fonctions de E dans C.

**a.* On suppose qu'il existe n points distincts $x_1, \dots, x_n$ de E tels que, pour $1 \leq i, j \leq n$, la matrice carrée $A = [f_i(x_j)]$, d'ordre n, soit régulière. Soit f_{n+1} une fonction de E dans C telle que, pour $1 \leq i, j \leq n+1$, la matrice carrée $B = [f_i(x_j)]$, d'ordre $n+1$, soit singulière pour tout choix de x_{n+1} dans E. Montrer qu'alors f_{n+1} est combinaison linéaire de $f_1, \dots, f_n$.

b. Montrer par récurrence que les fonctions $f_1, \dots, f_n$ sont linéairement indépendantes sur C si et seulement s'il existe n points $x_1, \dots, x_n$ de E tels que la matrice carrée $[f_i(x_j)]$, d'ordre n, soit régulière.

4° Soient $h_1, \dots, h_n$ n caractères distincts du groupe G, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des nombres complexes et $f = \lambda_1 h_1 + \cdots + \lambda_n h_n$.

a. Montrer que, si les λ_k sont réels ≥ 0, alors f est une fonction de type positif. Donner, dans le cas où $G = \mathbf{R}$, un exemple de fonction de type positif réelle, non constante.

**b.* Réciproquement, on suppose que f est de type positif. Montrer, en utilisant le *b.* 3°, que les λ_k sont alors réels ≥ 0 [on remarquera que $z \mapsto |z|^2$ est une surjection de C sur $\mathbf{R}_+$].

II. ON SUPPOSE QUE G = Z

1° Montrer qu'une fonction h de Z dans C est un caractère de Z si et seulement si elle est de la forme $n \mapsto e^{int}$ avec $t \in \mathbf{R}$.

2° Soit λ une fonction de R dans C, 2π-périodique et continue par morceaux, et définissons une fonction f de Z dans C par :

$$f(n) = \frac{1}{2\pi} \nearrow \int_0^{2\pi} e^{-int} \lambda(t)\, dt$$

[autrement dit, $f(n)$ est le coefficient de Fourier $c_n(\lambda)$ de λ].
Montrer que, si λ est ≥ 0 sur R, alors f est de type positif sur Z.

Tournez la page S.V.P.

3° Soit f une fonction de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{C}$ telle que $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |f(n)| < +\infty$.

a. Montrer qu'il existe une fonction λ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, 2π-périodique et continue, telle que $f(n) = c_n(\lambda)$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

b. Montrer que, si f est de type positif, alors on a :

$$\int_0^{2\pi} |\varphi(t)|^2 \lambda(t)\,dt \geq 0 \tag{3}$$

pour tout polynôme trigonométrique φ [on rappelle que, par définition, un polynôme trigonométrique est une combinaison linéaire (finie) de caractères de $\mathbf{Z}$].

• *c.* Montrer à l'aide du *b.* que, si f est de type positif, (3) est encore vrai lorsque φ est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$.

• *d.* Montrer que la fonction f est de type positif (si et) seulement si la fonction λ est ≥ 0 sur $\mathbf{R}$.

III. ON SUPPOSE QUE $G = \mathbf{R}$

On admet qu'une fonction continue h de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ est un caractère de $\mathbf{R}$ si et seulement si elle est de la forme $x \mapsto e^{ixt}$ avec $t \in \mathbf{R}$.

1° Soit λ une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda(t)|\,dt$$

soit finie et définissons une fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ par :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} \lambda(t)\,dt.$$

Montrer que, si λ est ≥ 0 sur $\mathbf{R}$, alors f est de type positif sur $\mathbf{R}$.

2° Soit f une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Montrer que si tous les coefficients de Fourier $c_n(f)$ sont ≥ 0, alors f est de type positif sur $\mathbf{R}$.

3° On se donne une fonction continue f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, positive et paire, de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. On désigne par f' une fonction continue par morceaux égale à la dérivée de f, là où celle-ci existe.

a. Montrer que, si g est une fonction positive et décroissante de $[0,\pi]$ dans $\mathbf{R}$, alors $\int_0^\pi g(t) \sin kt\,dt$ est ≥ 0 pour tout k entier ≥ 0.

b. On suppose ici que f est périodique, de période $2\tau > 0$, et que, sur l'intervalle de demi-période $[0,\tau]$, f est décroissante et f' est croissante. Déduire de *a.* que f est alors une fonction de type positif sur $\mathbf{R}$ [on pourra commencer par traiter le cas où $\tau = \pi$, puis ramener le cas général à ce cas].

• *c.* On suppose ici que f est décroissante et f' croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Déduire de *b.* que f est alors une fonction de type positif.

4° On désigne par f la fonction $x \mapsto e^{-x^2/2}$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On suppose connu que :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

que l'on notera α pour simplifier.

a. On pose, pour $n \in \mathbf{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2/2}\,dt$. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}. En déduire qu'on a $I_n = \frac{(2n)!}{n!} 2^{-n} \alpha$.

b. Calculer, pour $x \in \mathbf{R}$, $g(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t^2/2}\,dt$, et comparer la fonction g ainsi obtenue à la fonction f.

c. Déduire de *b.* que f est une fonction de type positif.

• • •

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail